● 島田 了輔 特定助教

Ryosuke SHIMADA (Program-Specific Assistant Professor)

研 究 課 題： 組合せ論的数論幾何学への挑戦（Towards combinatorial arithmetic geometry）
専 門 分 野： 数論幾何学（Arithmetic geometry）
受入先部局： 理学研究科（Graduate School of Science）
前職の機関名： 香港大学（the University of Hong Kong）

Pythagoras が「万物の根源は数である」としたのは二千年以上前の話ですが、私も同じ考えに至り数学者になりました。勿論専門は「整数論」で、その中でも特に「数論幾何学」と呼ばれる分野で研究を行っています。

Langlands 予想は一見無関係な二つの異質な対象の間に不思議な関係性があるという類の予想で、素数の神秘に根差すものです。そしてアファイン Deligne-Lusztig 多様体や志村多様体はこの Langlands 予想への有用性が知られている数論幾何学的対象です。興味深いことに、これらの幾何に関する重要な情報が元々は数理物理や表現論の方面から来た組合せ論で計算できるということが近年徐々に明らかになっています。私の白眉プロジェクトの研究ではこれをさらに発展させ、数論幾何学に組合せ論を用いた新たな研究手法をもたらし、最終的には Langlands 予想へ貢献することを目標とします。

It was more than 2,000 years ago that Pythagoras held that “all things are made of numbers”. I came to the same conclusion and became a mathematician. My field is of course “number theory”, or more specifically, “arithmetic geometry”.
The Langlands conjecture is a conjecture that there is a mysterious relationship between two seemingly unrelated objects, and is rooted in the mystery of prime numbers. Affine Deligne-Lusztig varieties and Shimura varieties are arithmetic geometric objects known to be useful for the Langlands conjecture. Interestingly, it has become gradually clear in recent years that important information about these varieties can be computed in certain combinatorics, which originally came from mathematical physics and representation theory. My research in the Hakubi project aims to develop this further, bringing a new combinatorial approach to arithmetic geometry and ultimately contributing to the Langlands conjecture.

フェルマーの最終定理とラングランズ予想

現代数論において最も有名な定理は「フェルマーの最終定理」（3 以上の整数 n について、$x^n+y^n=z^n$ となる正整数の組（x,y,z）は存在しない）なのではないかと思います。ピタゴラスの時代からアンドリュー・ワイルズがこの問題を解決するまでの数論の歴史を綴った本でベストセラーになったものもあります [1]。実はワイルズは数論における「ラングランズ予想」という別の予想の一部を解決することによってフェルマーの最終定理を証明しました。

ラングランズ予想の歴史

ラングランズ予想の起源もフェルマーの遺した予想である「二平方和定理」（後にオイラーが証明）にあります。二平方和定理とは奇素数 p が整数 x と y を用いて $p=x^2+y^2$ と表せるための必要十分条件は p が 4 で割って 1 余ることであるという定理です。素数は無限に存在することが知られていますが、一見するとランダムで無意味な数の列としか思えません。しかしこの定理は素

図 1：たくさんの蚊と一緒に行列計算をよくしたベンチ

数たちが実はあるパターンを満たしているということを示しています。その後ガウスによって見出された「平方剰余の相互法則」は異なる二つの素数の間の不思議な相互関係を表しており、二平方和定理を特別な場合として含みます。この平方剰余の相互法則は日本で最初の世界的数学者とも言われる高木貞治により確立された「類体論」の起源となり、そして 20 世紀後半に提唱されたラングランズ予想は類体論を特別な場合として含む予想です。実はガウスはフェルマーの最終定理（当時は予想）にはあまり興味を示さなかったようなのですが、平方剰余の相互法則の方は気に入っていたようで、生涯にわたり複数の証明を与えました。現代ではどちらもラングランズ予想の文脈で捉えることができますが、これはガウスでさえ予期しなかったことでしょう。

ラングランズ予想と物理学

ラングランズ予想は保型表現とガロア表現という全く異なる数学的対象の結びつき（ラングランズ対応）を主張しています。これらの対象はそれぞれ異なる文脈で研究されていたのに、それらが深く結びつくというこの主張はそれ自体興味深く、これまで盛んに研究されてきましたが依然未解決の問題です。驚くべきことに、最近ではこのラングランズ予想自体が量子物理学における「電磁双対性」や「ミラー対称性」と関わりがあるのではないかということが指摘されています [2]。これらは電気力と磁気力という一見異なる物理現象の結びつきとその発展なわけですが、この結びつき自体が純粋に数論的動機から研究されてきたラングランズ対応と関連しているというのは大変興味深いことです。

私の研究

志村多様体はラングランズ対応を実現するために有用であることが知られている（代数）幾何学的対象です。数論幾何学とは大雑把にはこのような数論の問題に関連する幾何学的対象を研究する分野です。私もこの志村多様体やそれと深い関係のある多様体を調べています。私の研究の特徴的な点はこうした数論幾何学的対象を元々は数理物理の方面（例えば量子群の表現論）から来た組合せ論を駆使して調べているという点です。今後はこの方針をさらに推し進め、組合せ論を駆使して体系的に数論幾何学の研究を行う手法を確立させたいと考えています。将来的にはこの新しい数論幾何学が上述のラングランズ予想と量子物理学との関連にも貢献することを期待しています。

古代ギリシアには万物の根源は「数」であるとしたピタゴラスや「原子」であるとしたデモクリトスのような哲学者がいました。前者は現代数論の、後者は現代物理学の考え方に通ずるところがあります。数千年の時を経て、全く異なるように見えたこれらの考え方が数論と物理学として交わり始めていることを思うと、万物の根源の存在とその深さを感じることが出来る気がしています。

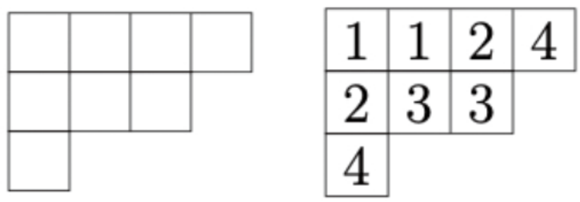

図 2：こうした組合せ論として例えばヤング図形（左）やヤング盤（右）がある

参考文献

[1] Singh, S.（著）、青木 薫（訳）、『フェルマーの最終定理』、新潮文庫、2006 年
[2] Frenkel, E.（著）、青木 薫（訳）、『数学の大統一に挑む』、文藝春秋、2015 年